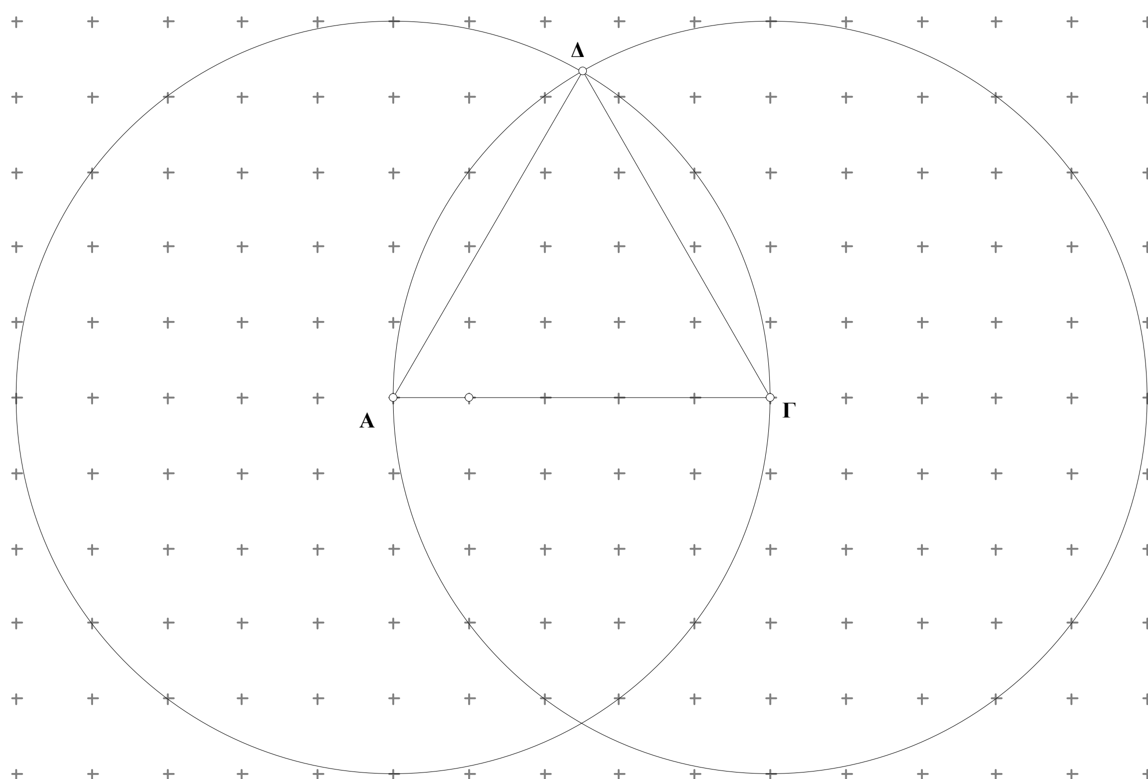
Εργασία 1η

Ι. Συστήματα αξιωμάτων για την Ευκλείδεια και τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες του επιπέδου και τα μοντέλα (υποδείγματα των τελευταίων)
ΙΙ. Σε μια χώρα υπάρχουν 5 κόμματα : Α (-ριστερά) Σ (-οσιαλιστές) Δ(-ημοκρατικοί) Φ(-φιλελεύθεροι και Ο(-ικολόγοι)
Κατά πόσους τρόπους μπορούν να συμπράξουν προεκλογικώς τα παραπάνω κόμματα, σχηματίζοντας συμμαχίες των δύο κομμάτων;
Θεωρώντας ως σημεία τα κόμματα, και ευθείες τις συμμαχίες, λέμε ότι δύο συμμαχίες είναι παράλληλες, αν δεν έχουν κοινό κόμμα.
Δείξτε ότι: Η γεωμετρία αυτή των πολιτικών συμμαχιών, πληροί το 1ο αξίωμα του Ευκλείδη, αλλά ως προς το 5ο δεν είναι ούτε Ευκλείδια, ούτε Ελλειπτική, ούτε Υπερβολική.
Από την μορφή του 5ου αξιώματος που πληροί (ποια;) καλείται ισχυρά Υπερβολική Γεωμετρία.
Να παρασταθεί η Γεωμετρία αυτή στο επιπεδο.
ΙΙΙ. Τι το ……«υπερβολικό» υπάρχει στην υπερβολική Γεωμετρία γενικά; Δηλ. γιατί καλείται έτσι;
Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης
$χ= α \cosh θ$, $y=β \sinh θ$
με χρήση «νέων Τεχνολογιών»

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Παραθέτουμε παρακάτω την αυθεντική θεμελίωση της γεωμετρίας από τον ίδιο τον Ευκλείδη , όπως αυτή γίνεται στο πρώτο βιβλίο Ι των «Στοιχείων» του.
Βεβαίως, με τα χρόνια, διαπιστώθηκαν αδυναμίες στην αξιωματική θεμελίωση του Ευκλείδη . Για παράδειγμα, στην Ι.1 πρόταση όπου γίνεται η κατασκευή του ισοπλεύρου τριγώνου, δεν διασφαλίζεται ότι υπάρχει η τομή των δύο κύκλων Βεβαίως υπέθεσε ο Ευκλείδης ότι ο κύκλος είναι συνεχής γραμμή , κάτι που δεν μπορεί να θεωρηθεί προφανές.
Το παρακάτω παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό:
Αν θεωρήσω τον χώρο Q^2 και επιχειρήσω να κατασκευάσω ισόπλευρο τρίγωνο με την Ευκλείδεια μέθοδο, ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά $α \in Q$, τότε με απλή εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος οι συντεταγμένες της τρίτης κορυφής $(χ,ψ) \notin Q^2$ αφού $ψ \in$ Ñ\Q



Στα σύγχρονα αξιωματικά συστήματα θεμελίωσης της Γεωμετρίας η τομή των δύο κύκλων εξασφαλίζεται από τα αξιώματα της συνέχειας και του μεταξύ.
Τον 19ο αιώνα ο Pash εισήγαγε (1882) την έννοια του μεταξύ για τρία σημεία. Το σύστημα αυτό βελτιώθηκε (βελτίωση σημαίνει συρίκνωση του αριθμού μη οριζόμενων στοιχείων ή αξιωμάτων) από τον Peano (1889) υπήρξε και το σύστημα του Pieri (1889)
Τον 20ο αιώνα το σύστημα Veblen (1904) που βελτίωνε το του Pash του Forder (1924) , Robinson(1940) Levi (1960)κ.λπ.
Την μεγάλη θέση όμως ανάμεσα σε όλα τα συστήματα , καταλαμβάνουν τα συστήματα των Hilbert-Ευκλείδη (1899) και Birkhoff (1932)
Όμως ο Ευκλείδης παράλληλα με τα 5 αξιώματά του εισήγαγε και ορισμούς εννοιών που δεν ορίζονται αυστηρά μαθηματικά, αλλά τρόπον τινά με διαισθητικούς ορισμούς . Οι ορισμοί αυτοί έγιναν αντικείμενο μελέτης κι ερμηνείας. Κυρίως ο νεοπλατωνικός Πρόκλος εντριφεί στους όρους (ορισμούς) και στα αξιώματα .Τους παραθέτουμε από το πρωτότυπο:

1. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Όροι (Ορισμοί)

1. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
2. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
3. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
4. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
5. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

6.Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

10.Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

11. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

12.Οξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

13.Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

14. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

15. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ὃ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

16. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

18.Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

19.Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

20. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

21.Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

22. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς

ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιονῥ τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

23.Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Η βάση της Γεωμετρίας θεμελιώνεται με τα πέντε αξιώματα-αιτήματα , ξεχωριστή θέση από τα οποία κατέχει το 5ο Αυτό, κατέστη επί αιώνες, αντικείμενο απόδειξης από τα υπόλοιπα 4 . Κι όχι μόνο αυτό, αλλά όταν η μαθηματική κοινότητα –πολύ αργάεπείσθη ότι αυτό είναι ανεξάρτητο των άλλων, τότε ακριβώς κατέστη δυνατή η εφαρμογή της ιδέας, του να διαφοροποιηθεί αυτό, δίνοντας άλλες Γεωμετρίες!……

••••••••

1.□□□ήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

2.Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν.

3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

4.Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

•••••• •••••••

1.Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

2.Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

3.Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

4.Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

(6*).[Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

(7*.) Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

(8*.)Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]

5.Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].

(9*)Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Όπως όμως προείπαμε, το αξιωματικό σύστημα βελτιώθηκε ποιοτικά από τον D. Hilbert και είναι πλέον γνωστό με το όρο «Σύστημα των Ευκλείδη- Hilbert»

2. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΥΚΛΕΙΔΗ -HILBERT

Υπάρχουν 5 ομάδες αξιωμάτων:
I. Αξιώματα προσπτώσεως ή συνοχής
II. Αξιώματα διάταξης
III. Αξιώματα ισοδυναμίας
IV. Αξιώματα παραλληλίας
V. Αξιώματα συνέχειας.
Οι μη οριζόμενες έννοιες είναι το σημείο, γραμμή (ευθεία) επίπεδο . Υπάρχουν και μη οριζόμενες σχέσεις, που είναι : κείται επί, είναι εντός, μεταξύ, ισοδύναμα , παράλληλα, συνεχής

- ***I. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΣΤΩΣΕΩΣ Ή ΣΥΝΟΧΗΣ***

1. Από κάθε δύο διάφορα σημεία Α, Β, $\exists$ πάντοτε μία γραμμή α
2. Από κάθε δύο διάφορα σημεία Α, Β, $\exists$ το πολύ μία γραμμή α
3. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία επί μίας γραμμής. Υπάρχουν τουλάχιστον 3 σημεία που δεν κείνται επί μίας γραμμής
4. Από κάθε τρία σημεία Α, Β, Γ, που δεν κείνται επί μίας γραμμής, υπάρχει ακριβώς ένα επίπεδο.

- ***II. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΗΣ***

1. Αν το σημείο Β είναι μεταξύ των σημείων Α, Γ, τότε Α, Β, Γ είναι τρία σημεία διάφορα επί της ιδίας ευθείας και το Β είναι επίσης μεταξύ Γ και Α .
2. Για δύο διάφορα σημεία Α, Γ, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Β , επί της ΑΓ , έτσι ώστε το Γ , να είναι μεταξύ Α και Β .
3. αν Α, Β, Γ , είναι τρία σημεία διάφορα επί της ιδίας γραμμής, τότε μόνο ένα από τα τρία σημεία είναι μεταξύ των δύο άλλων.
4. (αξίωμα Pasch) έστω Α, Β, Γ , τρία σημεία μη κείμενα επί της ιδίας γραμμής, και έστω m μία γραμμή στο επίπεδο (Α,Β,Γ) η οποία δεν διέρχεται από κανένα από τα Α, Β, Γ. . Τότε , αν η m , διέρχεται από σημείο του τμήματος ΑΒ, θα διέρχεται και από σημείο του τμήματος ΑΓ ή ΒΓ.

- ***III. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ***

1. Αν α, Β , είναι διάφορα σημεία επί της γραμμής m, και Α\` είναι ένα σημείο μιας γραμμής m\` , τότε υπάρχει ακριβώς ένα σημείο Β\` σε κάθε ημιευθεία της m\` που προέρχεται από το Α\` έτσι ώστε το τμήμα Α\`Β\` να είναι ισοδύναμο με το ΑΒ : ΑΒ$\cong$Α\`Β\`
2. τα προς τρίτον ισοδύναμα τμήματα , είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.
3. αν το Γ μεταξύ των Α και Β και το Γ\` μεταξύ των Α\` και Β\` και αν ΑΓ$\cong$Α\`Γ\` και ΓΒ$\cong$Γ\`Β\` , τότε ΑΒ$\cong$Α\`Β\`
4. αν ΒΑΓ είναι μια γωνία της οποίας οι πλευρές δεν κείνται σε μια γραμμή, και αν σε ένα δοθέν επίπεδο , Α\`Β\` είναι μια ευθεία προερχομένη από το Α\` , τότε υπάρχει ακριβώς μία Α\`Γ\` προς μία δοθείσα πλευρά της Α\`Β\` : $\angle$Β\`Α\`Γ\`$\cong$ $\angle$ΒΑΓ .Κάθε γωνία είναι ισοδύναμη με τον εαυτό της
5. αξίωμα (ΠΓΠ) αν δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία τριγώνου είναι ισοδύναμες προς τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία άλλου τριγώνου, τότε οι υπόλοιπες γωνίες του πρώτου τριγώνου, είναι ισοδύναμες με τις υπόλοιπες γωνίες του δευτέρου τριγώνου.

- ***IV. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ***

1. (Ευκλείδειο αίτημα –Αξίωμα Playfair)

Από δοθέν σημείο εκτός δοθείσης γραμμής, διέρχεται το πολύ μία γραμμή που δεν τέμνει την δοθείσα
(Το αξίωμα αυτό λέγεται και με το δεύτερο όνομα του Playfair διότι αυτός μελέτησε την ισοδυναμία της πρωτότυπης διατύπωσης του Ευκλείδη και της δικής του, η οποία είναι περισσότερο γνωστή στα σύγχρονα σχολικά εγχειρίδια)

- ***V. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ***

1.(Αξίωμα Αρχιμήδους)
Αν ΑΒ και ΓΔ δύο τυχόντα τμήματα, τότε υπάρχει αριθμός ν , τέτοιος ώστε , αν το τμήμα ΓΔ ληφθεί ν φορές επί της ημιευθείας ΑΒ , αρχίζοντας από το Α, τότε φθάνουμε σε ένα σημείο Ε, όπου ν ΓΔ=ΑΕ και όπου το Β να είναι μεταξύ των Α και Ε .

2. (Αξίωμα Γραμμικής Πληρότητας)
Το σύστημα των σημείων επί μιας γραμμής με την σχέση διάταξης και ισοδυναμίας της, δεν μπορεί να επεκταθεί, έτσι ώστε οι υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων της, καθώς επίσης και οι βασικές ιδιότητες γραμμικής διάταξης και ισοδυναμίας, που προκύπτουν από τα αξιώματα Ι , ΙΙΙ. V.1 να εξακολουθούν να ισχύουν.
Εδώ πρέπει να παρατεθεί η εξής παρατήρηση:
Τα αξιώματα V μπορούν να αντικατασταθούν από το
αξίωμα συνέχειας του Dedekind :
«Για κάθε διαμέριση των σημείων μιας γραμμής σε δύο μη κενά σύνολα , έτσι ώστε κανένα σημείο του ενός συνόλου να κείται μεταξύ των σημείων του άλλου,, υπάρχει σημείο του ενός συνόλου , το οποίο κείται μεταξύ κάθε στοιχείου του ιδίου συνόλου και κάθε στοιχείου του άλλου συνόλου.»

3. ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΤΟΥ BIRKHOFF

Μη οριζόμενες έννοιες και σχέσεις:

a) σημεία,
b) σύνολα σημείων καλούμενα γραμμές,
c) απόσταση d(A, B) μεταξύ δύο σημείων A, B, ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός με d(A, B) = d(B, A)
d) γωνία AOB τριών διατεταγμένων σημείων A, O, B ($A \neq O$, $B \neq 0$), ένας πραγματικός αριθμός (mod 2π). Το σημείο O καλείται κορυφή της γωνίας.

<u>Αξίωμα Ι</u>. (του γραμμικού μέτρου) Τα σημεία A, B, ... μιας γραμμής m μπορούν να τεθούν σε μία 1—1 αντιστοιχία με τους πραγματικούς αριθμούς χ, έτσι ώστε $|\chi_B-\chi_A| = d(A,B)$,για όλα τα σημεία A,B.

Το αξίωμα αυτό καλείται και Αξίωμα της Αναλυτικής Γεωμετρίας, γιατί πράγματι σ' αυτό στηρίζεται ολόκληρη η Αναλυτική Γεωμετρία, αφού οδηγεί στην κατασκευή συστήματος 2 αξόνων και επομένως ζεύγους συντεταγμένων για κάθε σημείο του επιπέδου.

<u>Ορισμοί:</u> Ένα σημείο B είναι μεταξύ των A και C ($A \neq C$) αν d(A,B) +d(B,C) = d(A,C). Τα σημεία A, και C μαζί με όλα τα σημεία B μεταξύ των A και. C σχηματίζουν τμήμα AC. Η ημιευθεία m\` με πέρας O ορίζεται από δύο σημεία O, A της γραμμής m\` ($A \neq O$), ως το σύνολο όλων των σημείων A\` της m, έτσι ώστε το O να μην είναι μεταξύ του Λ και A\` . Αν A, B.C είναι τρία διάφορα σημεία, τα τρία Τμήματα AB, BC, CA λέμε ότι σχηματίζουν ένα τρίγωνο ABC με πλευρές AB, BC, CA και κορυφές A, B, C. Αν A, B, C είναι στην ίδια γραμμή, το τρίγωνο ABC καλείται εκφυλισμένο

Αξίωμα ΙΙ. (Αξίωμα σημείου-γραμμής) Μία και μόνο μία γραμμή m περιέχει δύο σημεία P, Q (P ≠ Q). Αν δύο διάφορες γραμμές δεν έχουν κοινό σημείο είναι παράλληλες Μία γραμμή θεωρείται παράλληλη προς τον εαυτό της.

Αξίωμα ΙΙΙ. (Αξίωμα του μέτρου γωνίας): Οι ημιευθείες m,n, από κάθε σημείο Ο μπορούν να τεθούν σε μία 1—1 αντιστοιχία με τους πραγματικούς αριθμούς α(mod 2π) έτσι ώστε αν A ≠ O και B ≠ O είναι σημεία των m και n αντίστοιχα, η διαφορά α_ν-α_m (mod 2π) είναι , <AOB.

Ορισμοί: Δύο ημιευθείες m,n από το O λέμε ότι σχηματίζουν ευθεία (εκτεταμένη) γωνία, αν <mOη = π. Δύο ημιευθείες m, n από το O λέμε ότι σχηματίζουν ορθή γωνία, αν <mOn = ±π /2, οπότε λέμε επίσης σ' αυτή την περίπτωση ότι n m είναι κάθετη στη n.

Αξίωμα IV. (Αξίωμα ομοιότητας): Αν σε δύο τρίγωνα ABC και A'B'C' και για μία σταθερά k>0, d(A',B') = k d(A,B), d(A',C') = kd(A,C) καθώς και τότε επίσης d(B',C')=d(B,C) <C'B'A'=± <CBA και <A'C'B'=< ± ACB.

Ορισμοί: Δύο γεωμετρικά σχήματα είναι όμοια αν υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των δύο σχημάτων έτσι ώστε όλες οι αντίστοιχες αποστάσεις να είναι ανάλογες και οι αντίστοιχες γωνίες να είναι ίσες, ή όλες αντίθετες η μία της άλλης. Δύο γεωμετρικά σχήματα είναι ισοδύναμα, αν είναι όμοια με k =1.

Στο σύστημα αυτό του Birkhoff στηρίχθηκαν τόσο το σύστημα αξιωμάτων SMSG, όσο και το βελτιωμένο σύστημα SMSG .

4. ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ SMSG:

Μή οριζόμενες έννοιες: σημείο, γραμμή, επίπεδο.

Αξίωμα 1: Δοθέντων δύο διαφόρων σημείων, υπάρχει ακριβώς μία γραμμή που περιέχει και τα δύο.

Αξίωμα 2: (Αξίωμα απόστασης): Σε Κάθε ζεύγος δύο διάφορων σημείων αντιστοιχεί ακριβώς ένας θετικός αριθμός.

Αξίωμα 3: (Αξίωμα του κανόνα): Τα σημεία μιας γραμμής μπορούν ν' αντιστοιχηθούν στους πραγματικούς αριθμούς, έτσι ώστε:

α) σε κάθε σημείο της γραμμής ν' αντιστοιχεί ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός
β) σε κάθε πραγματικό αριθμό ν' αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο της γραμμής
γ) η απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αντιστοίχων αριθμών.

Αξίωμα 4: (Αξίωμα τοποθέτησης κανόνα). Δοθέντων δύο σημείων *P* και Q μιας γραμμής, το σύστημα συντεταγμένων μπορεί να εκλεγεί έτσι ώστε η συντεταγμένη του *P* να είναι μηδέν και η συντεταγμένη του Q να είναι θετική.

Αξίωμα 5: α) Κάθε επίπεδο περιέχει τουλάχιστον τρία μη συγγραμμικά σημεία.
β) Ο χώρος περιέχει τουλάχιστον τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία.

Αξίωμα 6: Αν δύο σημεία κείνται σ' ένα επίπεδο, τότε η γραμμή που περιέχει αυτά τα σημεία κείται στο ίδιο επίπεδο.

Αξίωμα 7: Κάθε τρία σημεία κείνται σ' ένα τουλάχιστον επίπεδο και κάθε τρία μη συγγραμμικά σημεία κείνται ακριβώς σ' ένα επίπεδο. Πιο σύντομα, κάθε τρία σημεία είναι συνεπίπεδα και κάθε τρία μη συγγραμμικά σημεία ορίζουν ένα επίπεδο.

Αξίωμα 8: Αν δύο διάφορα επίπεδα τέμνονται, τότε η τομή τους είναι μία γραμμή.

Αξίωμα 9: (Αξίωμα χωρισμοί επιπέδου). Δοθείσας μιας γραμμής και ενός επιπέδου που την περιέχει, τα σημεία του επιπέδου που δεν κείνται επί της γραμμής σχηματίζουν δύο σύνολα έτσι ώστε

α) καθένα από τα σύνολα να είναι κυρτό
β) αν το P ανήκει στο ένα σύνολο και το Q στο άλλο, τότε το τμήμα PQ τέμνει τη γραμμή.

Αξίωμα 10: (Αξίωμα χωρισμού του χώρου). Τα σημεία του χώρου που δεν κείνται σ' ένα δεδομένο επίπεδο σχηματίζουν δύο σύνολα έτσι ώστε

α) καθένα από τα σύνολα να είναι κυρτό

β) αν το P ανήκει στο ένα σύνολο και το Q στο άλλο, τότε το τμήμα EQ τέμνει το επίπεδο.

Αξίωμα 11: (Αξίωμα μέτρησης γωνίας). Σε κάθε γωνία BAC αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός m μεταξύ 0 και 180.

Αξίωμα 12: (Αξίωμα κατασκευής γωνίας). Έστω $\overrightarrow{AE}$ μία ημιευθεία στην ακμή του ημιεπιπέδου H. Για κάθε αριθμό τ μεταξύ 0 και 180, υπάρχει ακριβώς μία ημιευθεία $\overrightarrow{AP}$ με P στο H, έτσι ώστε m<PAB = τ.

Αξίωμα 13: (Αξίωμα πρόσθεσης γωνιών). Αν D είναι ένα σημείο στο εσωτερικό της <BAC, τότε (για τις γωνίες) mBAC = mBAD + mDAC.

Αξίωμα 14: (Αξίωμα παραπληρώματος). Αν δύο γωνίες σχηματίζουν ένα γραμμικό ζεύγος, τότε είναι παραπληρωματικές.

Αξίωμα 15: (Αξίωμα ΠΓΠ). Δοθείσας μιας αντιστοιχίας μεταξύ δύο τριγώνων(ή μεταξύ ενός τριγώνου και του εαυτού του), εάν δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία του πρώτου τριγώνου είναι ισοδύναμες προς τα αντίστοιχα μέρη του δεύτερου τριγώνου, τότε η αντιστοιχία είναι μία ισοδυναμία.

Αξίωμα 16: (Αξίωμα παραλλήλων). Από ένα δεδομένο εξωτερικό σημείο υπάρχει το πολύ μία γραμμή παράλληλη προς μία δεδομένη γραμμή.

Αξίωμα 17: Σε κάθε πολυγωνικό χωρίο αντιστοιχεί ένας μοναδικός θετικός αριθμός καλούμενος το εμβαδόν.

Αξίωμα 18: Αν δύο τρίγωνα είναι ισοδύναμα, τότε τα τριγωνικά χωρία έχουν Το ίδιο εμβαδόν.

Αξίωμα 19: Έστω ότι το χωρίο R είναι η ένωση δύο χωρίων R_1 και R_2. 'Εστω ότι τα R_1 και R_2 τέμνονται το πολύ σ' ένα πεπερασμένο αριθμό τμημάτων και σημείων. Τότε το εμβαδόν του R είναι το άθροισμα των εμβαδών των R_1 και R_2.

Αξίωμα 20: Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι το γινόμενο του μήκους της βάσης του και του μήκους του ύψους του.

Αξίωμα 21: 0 όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι το γινόμενο του μήκους του ύψους και του εμβαδού της βάσης.

Αξίωμα 22: (Αρχή του Cavalieri) Δοθέντων δύο στερεών και ενός επιπέδου, αν για κάθε επίπεδο που τέμνει τα στερεά και είναι παράλληλο προς το δεδομένο επίπεδο οι δύο τομές έχουν ίσα εμβαδά, τότε τα δύο στερεά έχουν τον ίδιο όγκο.

5. ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ SMSG:

(αφορά την Γεωμετρία του χώρου):

Αξίωμα 1: α) Κάθε γραμμή περιέχει τουλάχιστον δύο διάφορα σημεία.

β) Κάθε επίπεδο περιέχει τουλάχιστον τρία μη συγγραμμικά σημεία.

γ) Ο χώρος περιέχει τουλάχιστον τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία, τα οποία ανά τρία δεν είναι συγγραμμικά.

Αξίωμα 2: Για κάθε δύο διάφορα σημεία στο χώρο, υπάρχει ακριβώς μία γραμμή που περιέχει και τα δύο.

Αξίωμα 3: Για κάθε τρία μη συγγραμμικά σημεία, υπάρχει ακριβώς ένα επίπεδο που τα περιέχει.

Αξίωμα 4: Αν δύο διάφορα σημεία κείνται σ' ένα επίπεδο, τότε η γραμμή που τα περιέχει κείται στο επίπεδο.

Αξίωμα 5: Αν δύο διάφορα επίπεδα έχουν μη κενή τομή, η τομή τους περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία.

Αξίωμα 6: Υπάρχει μία συνάρτηση d από το καρτεσιανό γινόμενο S x S στο R (d:SXS —> R) έτσι ώστε

α)Για κάθε P,Q $\in$ S, d(P,Q) ≥ 0

β) d(P,Q)=0 αν και μόνο αν P=Q

γ) Για κάθε P, Q $\in$ S, d(P, Q) = d(Q, P)

δ) Για κάθε P, Q, D $\in$ S, d(P, D) $\leq$ d(P, Q) + d(Q, D)

Αξίωμα 7: (Αξίωμα κανόνα). Κάθε γραμμή έχει ένα σύστημα συντεταγμένων.

Αξίωμα 8: (Αξίωμα παραλλήλων του Ευκλείδη). Αν P είναι ένα σημείο όχι επί μιας γραμμής r, υπάρχει μία μοναδική γραμμή που περιέχει το P, παράλληλη προς r.

Αξίωμα 9: (Αξίωμα χωρισμού επιπέδου). Αν π είναι ένα επίπεδο και r μία γραμμή στο π, τότε π\ τ είναι η ένωση δύο συνόλων H_1 και H_2 έτσι ώστε

α) τα H_1 και H_2 να είναι κυρτά

β) $H_2 \cap H_2 = Ø$

γ)αν $P \in H_1$ και $Q \in H_2$,τότε $r \cap \overline{PQ} \neq Ø$.

Αξίωμα 10: (Αξίωμα χωρισμού του χώρου). Δοθέντος ενός επιπέδου α στο χώρο, το σύνολο των σημείων που δεν κείνται στο α είναι η ένωση δύο συνόλωνH_1 και H_2 έτσι ώστε

α) καθένα από τα σύνολα να είναι κυρτό

β) $H_2 \cap H_2 = Ø$

γ) κάθε τμήμα που ενώνει ένα σημείο στο ένα σύνολο με ένα σημείο στο άλλο τέμνει το α.

Αξίωμα 11: Υπάρχει μία συνάρτηση m από το σύνολο όλων των γωνιών στους πραγματικούς αριθμούς έτσι ώστε για κάθε γωνία <A, 0<m*A <180.

Αξίωμα 12: (Αξίωμα μοιρογνωμονίου) Έστω AB μία ημιευθεία, H ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζονται από την AB και x ένας θετικός αριθμός έτσι ώστε $0 \leq χ \leq 180$. Υπάρχει μία 1—1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου όλων των αριθμών χ και του συνόλου των ημιευθειών AX που κείνται στην ένωση του H και της ακμής του έτσι ώστε

α) η AB ν' αντιστοιχεί στον αριθμό 0.

β) η ημιευθεία AR η αντίθετη της AB ν' αντιστοιχεί στον αριθμό 180

γ) αν X είναι στο εσωτερικό της <BAY και αν x και y είναι οι αριθμοί που αντιστοιχούν στις AX και AY, αντίστοιχα, τότε χ <y.

δ) αν X και Y δεν είναι συγγραμμικά με το A και αν χ και y είναι οι αριθμοί που αντιστοιχούν στις AX και AY, αντίστοιχα, τότε m*XAY =|x — y|

Αξίωμα 13: (Αξίωμα ΠΓΠ). Αν σε δύο τρίγωνα υπάρχει μία αντιστοιχία κατά την οποία δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία του ενός είναι ισοδύναμες, αντίστοιχα, με τις αντίστοιχες πλευρές και την περιεχόμενη γωνία του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα.

Αξίωμα 14: (Αξίωμα εμβαδού).

α) σε κάθε πολυγωνικό χωρίο R αντιστοιχεί ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός καλούμενος το εμβαδόν του R και συμβολιζόμενος με α(R).

β) αν R και S είναι ισοδύναμα τρίγωνα, τότε τα τριγωνικά χωρία που ορίζονται από αυτά έχουν ίσα εμβαδά

γ) έστω ότι R και S είναι δύο πολυγωνικά χωρία που είναι ξένα ή έχουν κοινές μόνο ακμές και κορυφές. Τότε $α(R \cup S) = a(R) + a(S)$.

δ) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι το γινόμενο του μήκους της βάσης του και του μήκους του ύψους του.

Αξίωμα 15: α) σε κάθε στερεό αντιστοιχεί ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός καλούμενος ο όγκος του.

β) ο όγκος ενός ορθού παραλληλεπιπέδου είναι ίσος προς το γινόμενο των τριών διαστάσεών του.

γ) ο όγκος ενός στερεού είναι το άθροισμα των όγκων του πεπερασμένου αριθμού στερεών χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία από τα οποία αποτελείται.

Αξίωμα 16: (Αρχή του Cavalieri) Αν δύο στερεά μπορούν να βρίσκονται έτσι ώστε οι τομές τους με κάθε επίπεδο παράλληλο προς σταθερό επίπεδο, να είναι ισοδύναμες, τότε τα δύο στερεά είναι ισοδύναμα.

6. ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΤΟΥ CHOQUET

Ένα επίπεδο είναι ένα σύνολο Π. του οποίου θεωρούμε ένα σύνολο D υποσυνόλων του που καλούνται ευθείες.

•. •••••••• •••••••••••

Αξίωμα Ia: Για κάθε ζεύγος (x, y) διαφόρων σημείων του Η, υπάρχει μία και μόνο μία ευθεία που περιέχει τα χ και y.

Αξίωμα Ib: Για κάθε ευθεία D και για κάθε σημείο x, διέρχεται από το x μία και μόνο μία παράλληλη ευθεία.

•. •••••••• ••••••••

Αξίωμα ΙΙa: Με κάθε ευθεία D συνυπάρχουν δύο δομές ολικής διάταξης, αντίθετες η μία στην άλλη.

Αξίωμα ΙΙb: Για κάθε ζεύγος (A, B) παραλλήλων ευθειών και για όλα τα σημεία a, b, a`,b` τέτοια ώστε a, a' $\in$ A και δ, δ' $\in$ B, κάθε παράλληλη προς αυτές τις ευθείες που συναντά το [a, b], συναντά επίσης το [a', b'].

ΙΙΙ. Αξιώματα συσχετισμένης δομής

Αξίωμα ΙΙΙ α: Με το επίπεδο Π, υπάρχει και μία απεικόνιση d του Πx Π στο R_+ καλούμενη απόσταση και τέτοια ώστε:

1. d(y,x)=d(x,y) για όλα τα χ,y $\in \Pi$
2. Για κάθε προσανατολισμένη ευθεία D, κάθε $\chi \in D$ και κάθε αριθμό $1 \geq 0$ υπάρχει στην D ένα μοναδικό σημείο y τέτοιο ώστε $x \leq y$ και d(x, y) = 1.
3. $\chi \in [\alpha,b] \Rightarrow d(\alpha,\chi)+d(\chi, b) = d(\alpha, b)$

Αξίωμα ΙΙΙb: Για κάθε ζεύγος παραλλήλων ευθειών (A,B) Και για όλα τα σημεία a,b,a',b' τέτοια ώστε α,α' $\in$ A και b, b' $\in$ B, η παράλληλη προς τις ευθείες αυτές που διέρχεται από το μέσο του (a, b), διέρχεται επίσης από το μέσο του (α',δ').

IV Αξιώματα μετρικής δομής

Αξίωμα IVa: (καθετότητας) Η καθετότητα (συμβ. $\perp$) είναι μία διμελής σχέση στο σύνολο D των ευθειών του Π τέτοια ώστε

1. $A\perp B \Leftrightarrow B \perp A$
2. $A\perp B$ => A και B δεν είναι παράλληλες.
3. Για κάθε ευθεία A, υπάρχει μία τουλάχιστον ευθεία B, τέτοια ώστε $A\perp B$.
4. Για κάθε ζεύγος (A, B) τέτοιο ώστε $A\perp B$, έχουμε την ισοδυναμία

$$B // B' \Leftrightarrow A\perp B'$$

Αξίωμα IVb: (συμμετρίας) Για κάθε ζεύγος (A_1,A_2) ημιευθειών της ίδιας αρχής Ο έχουμε

$$C(A_1,A_2)=C(A_2,A_1),$$

όπου: $c(A_1 , A_2)$ συμβολίζει το βαθμωτό k τέτοιο ώστε $\overline{O\phi(\chi)} = \kappa\overline{O\chi}, \forall\chi \in D$, φ είναι η προβολή ορθογώνια στην D_1, Οφ(x) και Οx τα αλγεβρικά μέτρα των(Ο, ψ(χ)) και

(O, x) και D_1 , D_2 οι προσανατολισμένες ευθείες που περιέχουν τις A_1 και A_2, αντίστοιχα, έτσι ώστε $A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$. (k είναι ουσιαστικά το συνημίτονο της γωνίας).

Τα αξιώματα αυτά οδηγούν στον ορισμό της norm.[1]

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η υπερβολική γεωμετρία, οικοδομείται επίσης στην βάση του συστήματος αξιωμάτων Ευκλείδη – Hilbert, όπου όμως το 5^0 αξίωμα του Ευκλείδη, έχει αντικατασταθεί από το υπερβολικό αξίωμα:
΄΄Υπάρχει μια ευθεία ε και ένα σημείο Α εκτός αυτής, έτσι ώστε από το Α να διέρχονται δύο τουλάχιστον παράλληλες προς την ευθεία ε΄΄.
Επιπλέον, αποδεικνύεται ό,τι αν ισχύει το υπερβολικό αξίωμα, τότε ισχύει και το γενικευμένο υπερβολικό αξίωμα:
΄΄Για κάθε σημείο Α εκτός ευθείας ε, υπάρχουν άπειρες ευθείες παράλληλες προς την ε΄΄.
Το κοινό μέρος αξιωμάτων της Ευκλείδειας και της υπερβολικής γεωμετρίας,
λέμε ότι αποτελεί την ουδέτερη γεωμετρία.
Ένα μοντέλο για την υλοποίηση της υπερβολικής γεωμετρίας το οποίο οφείλεται στους Liouville, Beltrami και Poincare, είναι το εξής:
Σε ένα Ευκλείδειο επίπεδο εφοδιασμένο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, ορίζουμε:

- υπερβολικό επίπεδο, -συμβολικά ΄΄ Υ-επίπεδο΄΄- το σύνολο των

σημείων {M(x,y) / y >0}.

- Υ-ευθείες, ορίζουμε τις ημιευθείες και τα ημικύκλια, που είναι κάθετα στον άξονα $x'x$ και περιέχονται στο Υ-επίπεδο.
- Υ-σημείο, ορίζουμε κάθε σύνηθες Ευκλείδειο σημείο του Υ-επιπέδου.

Τέλος:

- Παράλληλες λέγονται δύο Υ-ευθείες, οι οποίες δεν έχουν κοινό σημείο.

Πράγματι όπως φαίνεται και από το ακόλουθο σχήμα:
Από το σημείο Α που δεν ανήκει στην Υ-ευθεία ε_1, διέρχονται τρεις Υ-ευθείες παράλληλες προς την ε_1.

Ένα δεύτερο μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας (το οποίο οφείλεται στον Klein), είναι το εξής:

ΠΡΟΤΥΠΟ KLEIN

[1] **Ο Ι. Αραχωβίτης προτείνει τον όρο** μέγεθος **από το énorme που σημαίνει υπερμεγέθης. Έτσι, ο χώρος με norm θα καλείται** μεγεθικός χώρος) **καθώς και του** εσωτερικού γινομένου.

Σε ένα Ευκλείδειο επίπεδο, θεωρούμε κύκλο (O,R).Τότε ως:

- Υπερβολικό επίπεδο, θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία του κύκλου.
- Υπερβολικές ευθείες, θεωρούμε τις χορδές του κύκλου χωρίς τα άκρα τους
- Υπερβολικό σημείο, θεωρούμε κάθε σύνηθες Ευκλείδειο σημείο του υπερβολικού επιπέδου.
- Παράλληλες λέγονται δύο ευθείες, οι οποίες δεν έχουν κοινό σημείο.

Και στο μοντέλο αυτό, μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύουν τα αξιώματα της ουδέτερης γεωμετρίας και επιπλέον ισχύει το υπερβολικό αξίωμα.

Πράγματι όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, από το σημείο M που δεν ανήκει στην ευθεία AB, διέρχονται δύο υπερβολικές ευθείες $ε_2$ και $ε_1$ οι οποίες είναι παράλληλες προς την AB

Ένα πράγμα που έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον , είναι στο κατά πόσον οι «ευθείες» του μοντέλου αυτού είναι άπειρα επεκτεινόμενες. Αυτό πραγματοποιείται μέσω μιας ιδιότυπης μετρικής , της

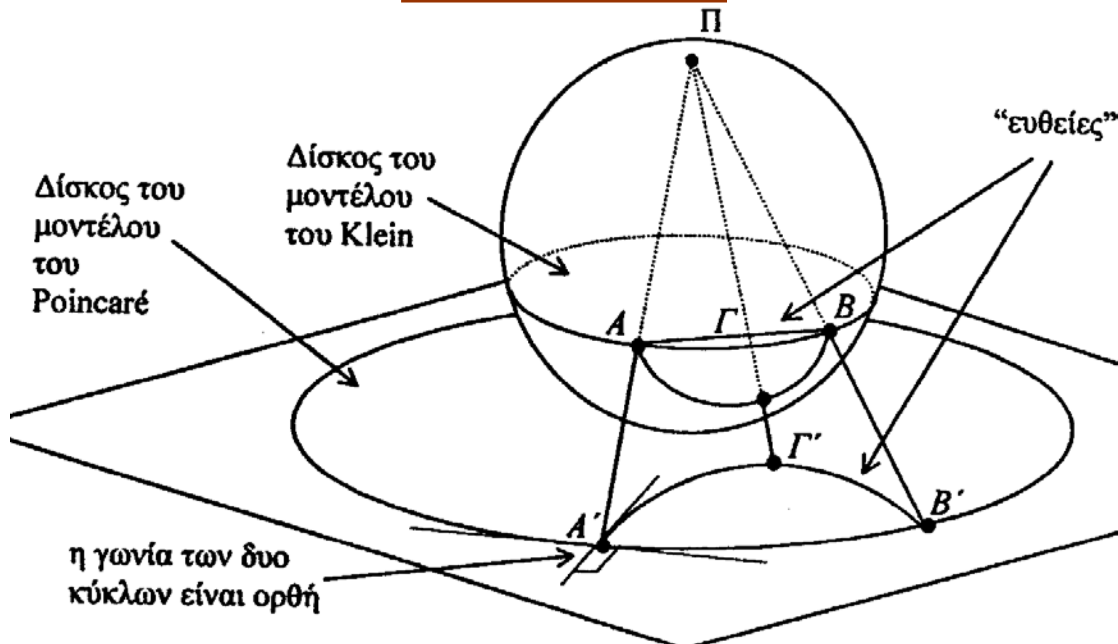
$D(Γ, Δ)=λ*|\ln (ΓΔ, AB)|=λ|\ln \frac{ΓA * ΔB}{ΓB * ΔA}|$, $λ>0$ (1)

όπου έχω πάρει τους διπλούς λόγους τεσσάρων σημείων (συζυγή αρμονικά)

Από τον τύπο (1) προκύπτει, ότι όταν Γ→A , τότε στον (1) τα υπόλοιπα μήκη θα είναι θετικά , το μήκος του ΓA θα τείνει στο 0 και ο λογάριθμος του αριθμητικού λόγου στο - ∞ , η απόσταση στο + ∞ .

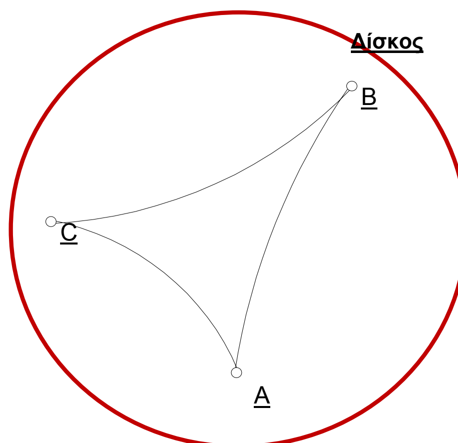
Έτσι υλοποιείται και απαίτηση για «άπειρες» ευθείες!
Με χρήση του παραπάνω προτύπου , μπορεί να υλοποιηθεί η υπερβολική Γεωμετρία και σε ένα άλλο πρότυπο , του Poincore ,, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

ΠΡΟΤΥΠΟ POINCARE



Εικόνα 1Στο πρότυπο του Klein , κάνουμε στερογραφική προβολή. Η στερεογραφική προβολή , διατηρεί το επίπεδο Α,Β,Γ και τις γωνίες. Έτσι, όπως φαίνεται και από το σχήμα, έχουμε πάλι ως «επίπεδο» έναν ανοικτό δίσκο και ως «ευθείες» τις προβολές των ευθειών του δίσκου του Klein , οι οποίες θα είναι είτε διάμετροι του κύκλου, είτε τόξα, κάθετα στον κύκλο. Και σε αυτό το πρότυπο , έχουμε περισσότερες παράλληλες από ένα σημείο εκτός ευθείας προς ευθεία , ενώ έχουμε και «οριακές παραλλήλους!»

Ο δίσκος του Πουανκαρέ αποτελεί μοντέλο για την υπερβολική γεωμετρία. Στο μοντέλο αυτό, μια ευθεία γραμμή που περνά από δύο σημεία, ορίζεται ως τόξο που περνά από τα δύο σημεία και είναι κάθετο στον κύκλο.



Εικόνα 2. Ένα υπερβολικό τρίγωνο πάνω στο πρότυπο του Poincare

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η ελλειπτική γεωμετρία (η οποία σχετίζεται με την σφαιρική γεωμετρία), θεμελιώνεται με την βοήθεια των εξής αξιωμάτων:

I. Αξιώματα της ΄΄σύμπτωσης΄΄

I_1: Για οποιαδήποτε σημεία Α και Β, δεν υπάρχει παραπάνω από μια ευθεία που τα περιέχει.

I_2: Κάθε ευθεία, περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία.

I_3: Για κάθε τριάδα μη συνευθειακών σημείων, υπάρχει πάντοτε επίπεδο που τα περιέχει. Κάθε επίπεδο περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο.

I_4: Για κάθε τριάδα μη συνευθειακών σημείων, υπάρχει το πολύ ένα επίπεδο που τα περιέχει.

I_5: Αν δύο σημεία Α, Β μιας ευθείας ανήκουν στο επίπεδο α, τότε και όλη η ευθεία που ορίζεται από τα Α και Β περιέχεται στο επίπεδο α.

I_6: Δύο επίπεδα α, β που έχουν κοινό σημείο Α, έχουν ένα τουλάχιστον επιπλέον κοινό σημείο Β.

I_7: Υπάρχουν τέσσερα τουλάχιστον σημεία, μη κείμενα στο ίδιο επίπεδο.

Στο σημείο αυτό οφείλουμε να αναφέρουμε τα εξής:

Ενώ από τα αξιώματα της σύμπτωσης της ελλειπτικής γεωμετρίας παραλείπεται το αξίωμα ΄΄Για κάθε δύο σημεία υπάρχει ακριβώς μια ευθεία που τα περιέχει΄΄, (αφού από δύο αντιδιαμετρικά σημεία στην επιφάνεια μιας σφαίρας διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι), ο F. Klein θεωρώντας ως σημείο στην επιφάνεια μιας σφαίρας ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων, εμπλούτισε τα αξιώματα της σύμπτωσης και με το παραπάνω αξίωμα.

II.Αξιώματα χωρισμού

Στην ελλειπτική γεωμετρία, δεν ισχύουν τα αξιώματα της διάταξης της ουδέτερης γεωμετρίας, αλλά μια ομάδα ΄΄αξιωμάτων χωρισμού΄΄.

Συγκεκριμένα, αν Α, Β, Γ, Δ είναι διακεκριμένα συνευθειακά σημεία, με το σύμβολο (Α, Β / Γ, Δ) εννοούμε ότι τα σημεία Α, Β ΄΄χωρίζουν΄΄ τα σημεία Γ,Δ, όπου η έννοια του χωρισμού, ορίζεται από τα εξής αξιώματα:

II_1: Αν (Α, Β / Γ, Δ) τότε (Γ, Δ /Α, Β) και (Β, Α / Γ, Δ)

II_2: Αν (Α, Β / Γ, Δ) τότε δεν ισχύει (Α, Γ / Β, Δ)

II_3: Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι διακεκριμένα και συνευθειακά, τότε ισχύει (Α, Β / Γ, Δ) ή (Α, Γ / Β, Δ) ή (Α, Δ / Γ, Δ)

II_4: Αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και διακεκριμένα, τότε υπάρχει ένα σημείο Δ, τέτοιο ώστε (Α, Β / Γ, Δ)

II_5: Για οποιαδήποτε 5 διακεκριμένα συνευθειακά σημεία Α,Β, Γ, Δ, Ε, αν ισχύει (Α, Β / Δ, Ε), τότε (Α, Β / Γ, Δ) ή (Α, Β / Γ, Δ)

Στο σημείο αυτό, εισάγουμε την έννοια της ΄΄προοπτικής΄΄, η οποία είναι προαπαιτούμενη για το επόμενο αξίωμα χωρισμού.

Έστω ε_1 και ε_2 δύο τυχαίες ευθείες και Α ένα σημείο που δεν ανήκει στις ε_1 και ε_2. Αν Β είναι τυχαίο σημείο της ε_1, τότε η ευθεία ΑΒ τέμνει την ε_2 σε ένα μοναδικό σημείο Γ.

Η παραπάνω διαδικασία, ορίζει μια ΄΄1-1΄΄ απεικόνιση των σημείων της ε_1 στην ε_2. Η απεικόνιση αυτή, λέγεται ΄΄προοπτική με κέντρο το Α, από την ε_1 στην ε_2΄΄ .Τότε ισχύει και το ακόλουθο αξίωμα χωρισμού:

II_6: Αν ε_1 είναι μια ευθεία που διέρχεται από τα διακεκριμένα σημεία A,B,Γ,Δ όπου $(A,B/\Gamma,\Delta)$ και A',B',Γ',Δ' οι εικόνες των A,B,Γ,Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ε_2 μέσω μιας προοπτικής, τότε ισχύει ότι $(A',B'/\Gamma',\Delta')$.

III.Αξιώματα συμφωνίας

Επιπλέον, ισχύουν για την ελλειπτική γεωμετρία, τα ΄΄αξιώματα συμφωνίας΄΄ της ουδέτερης γεωμετρίας:

III_1: Αν A,B είναι σημεία μιας ευθείας ε_1 και A' είναι σημείο της ευθείας ε_2, τότε σε κάθε ημιευθεία $A\chi$ της ε_1, υπάρχει σημείο B', τέτοιο ώστε $AB = A'B'$.

III_2: Δύο ευθύγραμμα τμήματα ίσα προς τρίτο, είναι και μεταξύ τους ίσα.

III_3: Έστω ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $AB,B\Gamma$ της ίδιας ευθείας ε, έχουν μόνο ένα κοινό σημείο το B. Έστω επίσης ότι τα τμήματα $A'B',B'\Gamma'$ της ίδιας ή μιας άλλης ευθείας ε_1, έχουν μόνο ένα κοινό σημείο το B'. Αν $AB = A'B'$ και $B\Gamma = B'\Gamma'$, τότε και $A\Gamma = A'\Gamma'$.

III_4: Έστω γωνία $\angle(\eta,\theta)$ του επιπέδου ε και μια ημιευθεία η' από το σημείο Ο του ίδιου ή διαφορετικού επιπέδου. Τότε υπάρχει μια μόνο ημιευθεία θ σε κάθε ημιεπίπεδο εκατέρωθεν της η', έτσι ώστε $\angle(\eta,\theta) = \angle(\eta',\theta')$.Κάθε γωνία είναι ίση με τον εαυτό της.

III_5: Αν για δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ισχύουν $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$, $\angle BA\Gamma = \angle B'A'\Gamma'$, τότε ισχύει ότι $\angle AB\Gamma = \angle A'B'\Gamma'$.

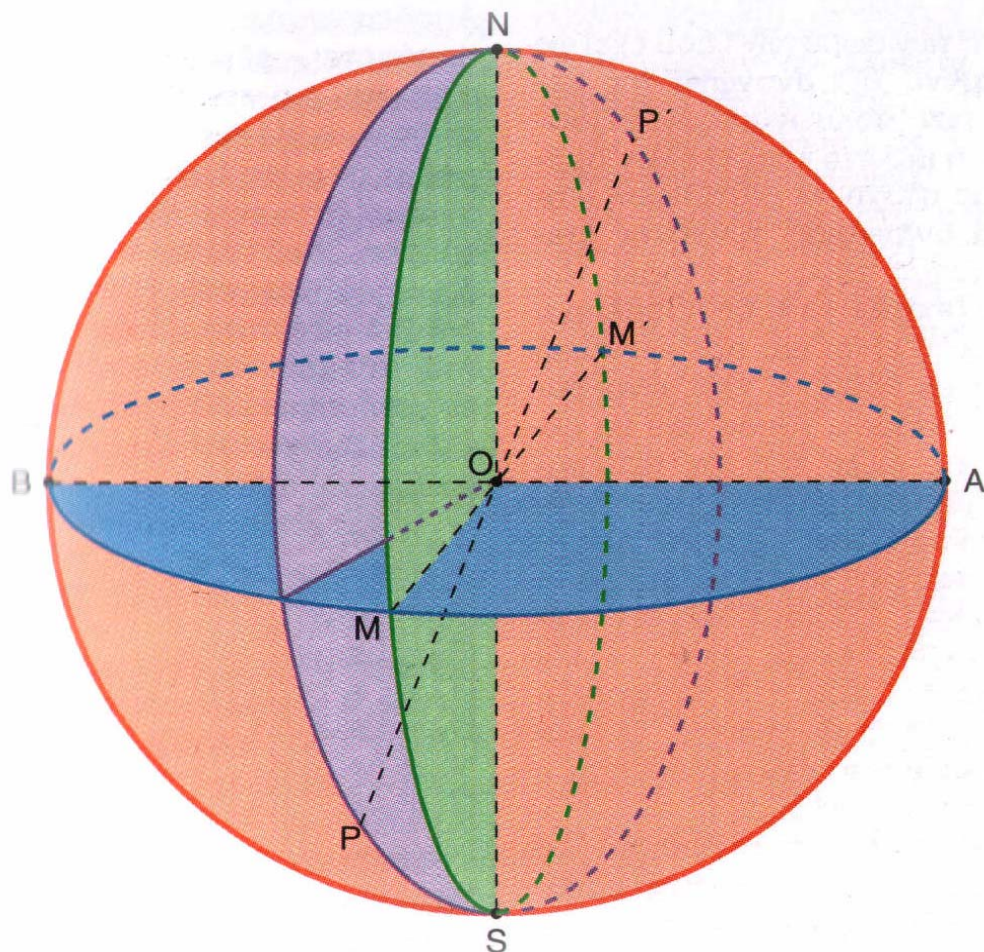
IV.Καθώς και το ΄΄ελλειπτικό αξίωμα΄΄:

Δεν υπάρχουν δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

Με την βοήθεια των παραπάνω αξιωμάτων, ένα μοντέλο υλοποίησης της ελλειπτικής γεωμετρίας είναι το εξής:

- Ελλειπτικό επίπεδο, ορίζουμε την επιφάνεια μιας σφαίρας.
- Ελλειπτικό σημείο, ορίζουμε ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων πάνω στο ελλειπτικό επίπεδο.
- Ελλειπτική ευθεία, ορίζουμε τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας που διέρχεται από δύο διακεκριμένα ελλειπτικά σημεία.

Πιο συγκεκριμένα, έχω το παρακάτω σχήμα , στο οποίο:



- Ελ-επίπεδο είναι η επιφάνεια της σφαίρας Ο
- Ελ-σημείο είναι κάθε ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων της Ο
- Ελ-ευθεία είναι κάθε μέγιστος κύκλος του Ο

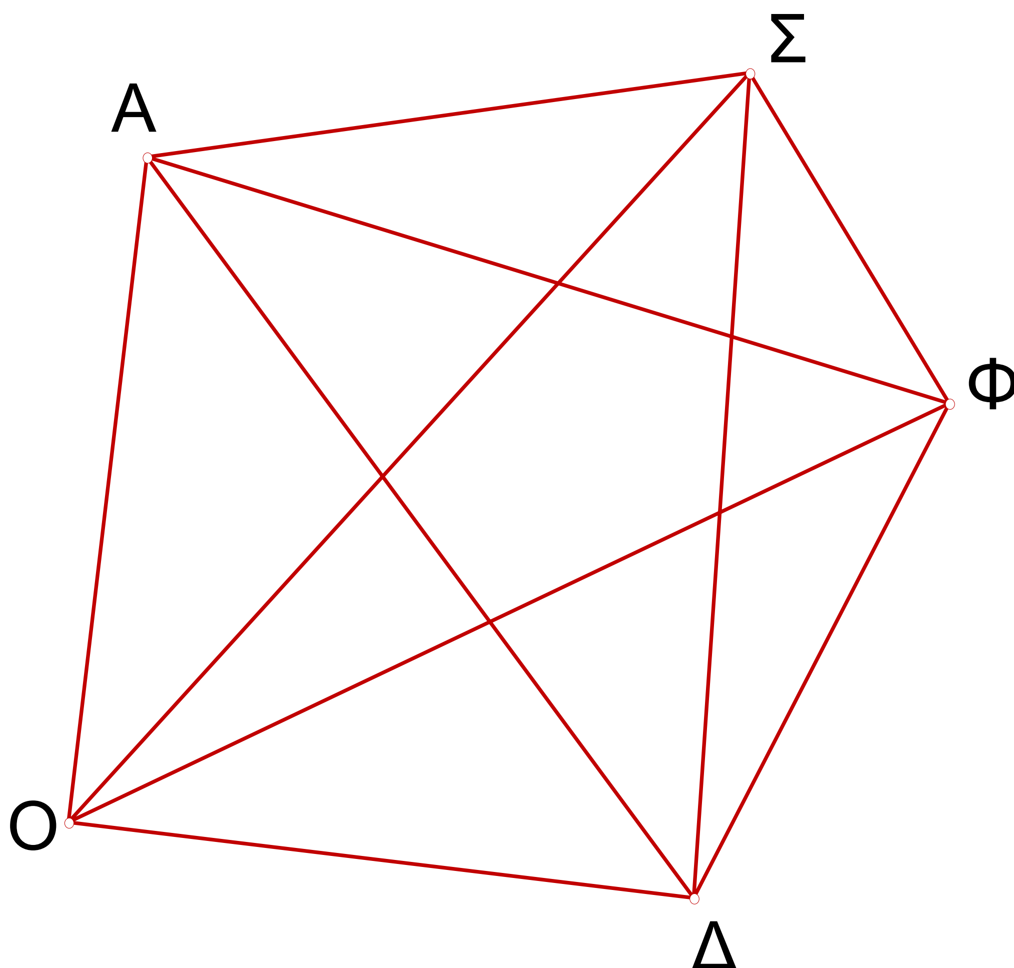
Το ζεύγος (N, S) καθώς και το ζεύγος (A,B) είναι Ελ-σημεία. Τα δύο αυτά σημεία, ορίζουν την ελ-ευθεία (N, S) (A, B) , δηλαδή τον μέγιστο κύκλο ANBS της σφαίρας Ο

Απόσταση δύο ελ- σημείων ορίζεται ως το πιο μικρό τόξο από τα δύο τόξα που ορίζουν τα δύο ελ- σημεία.. έτσι η μέγιστη δυνατή απόσταση δυο ελ-σημείων είναι π/2 , αν θέσω την ακτίνα του κύκλου ίση με την μονάδα.

Επί παραδείγματι, στο σχήμα έχω τα δύο σημεία (M,M') , (P,P') . Το πιο μικρό από τα τόξα με άκρα τα σημεία M, P, του μέγιστου κύκλου που ορίζεται από τα σημεία αυτά.

Με κάποιο τρόπο αποδεικνύεται ακόμη (Με σφαιρική Γεωμετρία) ότι το άθροισμα των γωνιών ενός ελ-τριγώνου είναι πάνω από 180^o .

Το παραπάνω πρότυπο ελλειπτικής Γεωμετρίας του επιπέδου που υλοποιείται στην σφαίρα, είναι η ομάδα των μετασχηματισμών που αφήνει αναλλοίωτα τα μήκη και τις γωνίες , είναι η ομάδα των στροφών της σφαίρας περί το κέντρο της .
Σήμερα είναι πλήρως διαμορφωμένη η ν-διάστατη ελλειπτική Γεωμετρία του Riemann ($\nu \geq 2$) .
Με την εργασία του ο Riemann, το 1854, έθεσε τις βάσεις για την θεμελίωση ολόκληρης κλάσης Γεωμετριών που έκτοτε φέρουν το όνομά του (Ρημάννειες)



ΙΙ. Επειδή κάθε κόμμα μπορεί να σχηματίσει πολιτική συμμαχία με κάθε άλλο από τα υπόλοιπα , μεταφραζόμενο αυτό σε γεωμετρική γλώσσα, σημαίνει ότι «από κάθε σημείο, άγεται προς κάθε άλλο μία ευθεία» Δηλ. ισχύει το $1^ο$ αξίωμα του Ευκλείδη.

Η Γεωμετρία αυτή είναι πεπερασμένη , αφού έχει 5 σημεία και $\binom{5}{2}$=10 ευθείες.

- Η γεωμετρία αυτή δεν μπορεί να είναι Ελλειπτική, διότι αν ήταν, δεν θα υπήρχαν ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Όμως , σύμφωνα με τον ορισμό της, υπάρχουν λ.χ. οι ευθείες ΑΣ και ΦΟ που εξ ορισμού είναι παράλληλες.
- Δεν είναι υπερβολική, διότι με το πεπερασμένο των ευθειών δεν είναι δυνατόν να εκπληρούται ο όρος των απείρων παραλλήλων από ένα σημείο προς ευθεία.
- Επίσης η Γεωμετρία αυτή δεν είναι Ευκλείδεια, διότι θα έπρεπε να ισχύει το $5^ο$ αίτημα , πράγμα που δεν είναι αληθές, καθ' όσον υπάρχει σημείο , λ.χ. το Α και ευθεία λ.χ. η ΔΦ από το οποίο άγονται δύο διαφορετικές παράλληλες προς αυτήν, λ.χ. οι ΑΣ και ΑΟ. Αυτές οι ευθείες είναι διαφορετικές, διότι αν συνέπιπταν, τότε $ΑΣ \equiv ΑΟ \Leftrightarrow Σ \equiv Ο$άτοπο!

Η μορφή του 5ου αξιώματος που εκπληρούται, μας επιτρέπει να κατατάξουμε την παρούσα γεωμετρία στην ισχυρά Υπερβολική Γεωμετρία , αφού από κάθε σημείο , προς πάσαν άλλην ευθεία που δεν ανήκει σ' αυτή , άγονται ακριβώς δύο παράλληλες

Απόδειξη: Έστω τα σημεία Χ, Υ , Ζ που ανήκουν στο G={Α, Σ, Φ, Δ, Ο} με $X \neq Y \neq Z \neq X$. έχω την ευθεία ΧΥ και το σημείο Ζ εκτός αυτής . Τότε επειδή υπάρχουν άλλα δύο ακριβώς διαφορετικά σημεία από τα Χ,Υ, Ζ , (έστω τα Κ,Λ $\in G$) τότε θα ορίζονται ακριβώς δύο διαφορετικές παράλληλες προς την ΧΥ που θα διέρχονται από το Ζ , οι ΖΚ και ΖΛ .
Αυτό συμβαίνει για κάθε σημείο εκτός ευθείας , άρα ομιλώ για ισχυρά Υπερβολική Γεωμετρία

<u>ΙΙΙ. Το «υπερβολικόν» της ……Υπερβολικής Γεωμετρίας</u>

Έχομε:

- Στην Ευκλείδειο την ύπαρξη μίας και μόνης παραλλήλου από σημείου εκτός αυτής και προς αυτήν.
- Στην Ελλειπτική την απουσία παραλλήλων από σημείο εκτός ευθείας και προς αυτήν.
- Στην Υπερβολική την ύπαρξη απείρων διαφορετικών παραλλήλων από σημείο εκτός ευθείας και προς αυτήν.

Επομένως ως πρακτικό κανόνα μνημονικό διάκρισης των Γεωμετριών θα μπορούσαμε να θεσπίσουμε *την αντιστοίχιση της ετυμολογικής καταγωγής της λέξης που χαρακτηρίζει την Γεωμετρία με την ύπαρξη , απουσία ή πληθώρα παραλλήλων από σημείο εκτός ευθείας και προς αυτήν!*

Γραφική παράσταση του συνόλου με παραμετρικές εξισώσεις

$$\chi = \alpha \cosh\theta \quad \text{και } \psi = \beta \sinh\theta \quad (1)$$

Με αντικατάσταση των εξ ορισμού ίσων προς το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο, έχομε:

$$\chi = \alpha \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \text{και } \psi = \beta \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad (2)$$

Η (2) μπορεί να ειδωθεί και ως σύστημα δύο εξισώσεων , από τα οποίες μπορεί να γίνει απαλοιφή του e^{x} και e^{-x}, ως εξής:

$$\chi^2 = \left(\alpha \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \quad \text{και } \psi^2 = \left(\beta \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\chi^2 = \alpha^2 \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} \ \text{ και } \psi^2 = \beta^2 \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} \Rightarrow$$

$$\chi^2 = \alpha^2 \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^0}{4} \ \text{ και } \psi^2 = \beta^2 \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^0}{4} \Rightarrow$$

$$\chi^2 = \alpha^2 \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2}\right) \text{ και } \psi^2 = \beta^2 \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} = \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2}\right) \ \text{και} \frac{\psi^2}{\beta^2} = \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (\text{αφ κατα μέλη})$$

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{η οποία είναι}$$

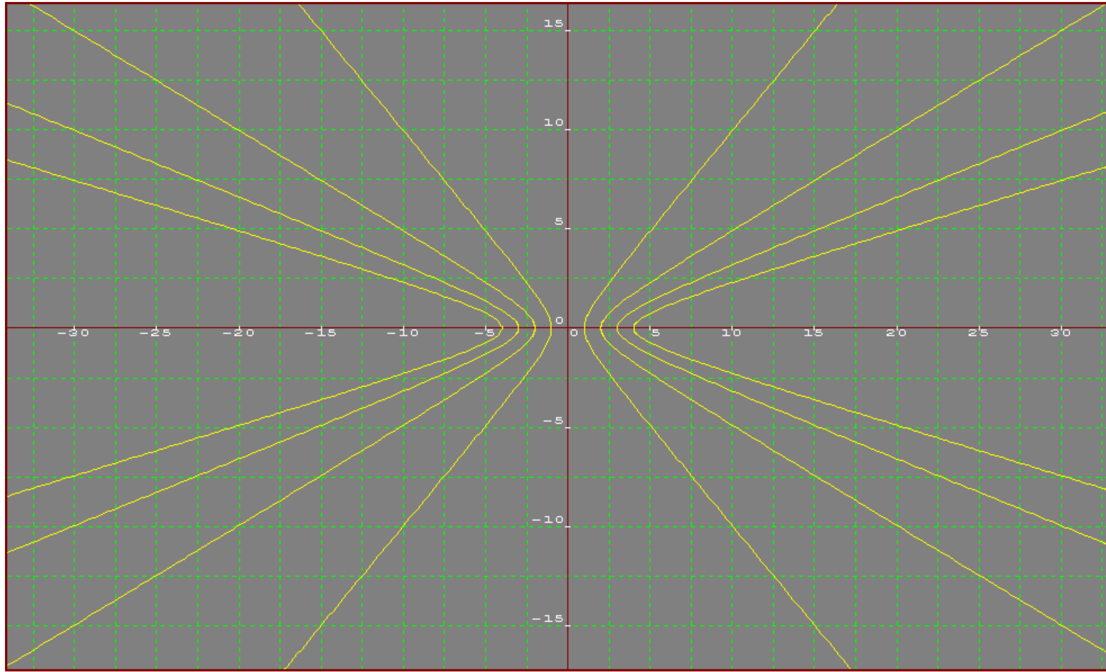
εξίσωση υπερβολής

επίσης από τις (2) , θέτοντας $e^x = t > 0 \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{t} > 0$ και εξ αυτού έχω μια άλλη παραμετρική μορφή της παραβολής , την

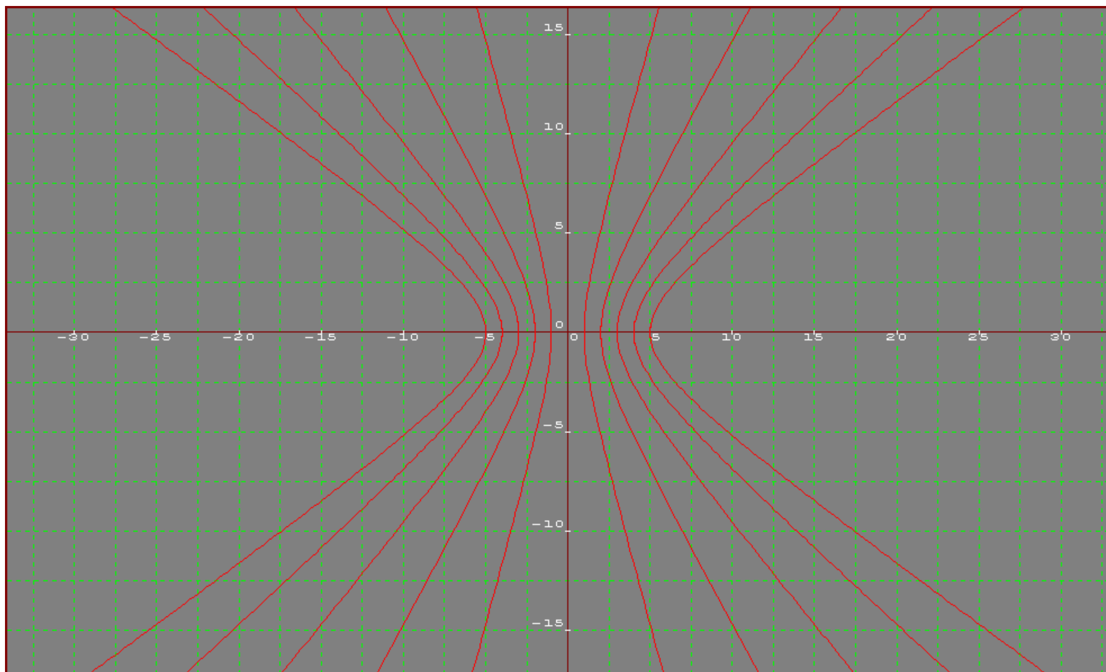
$$\chi = \alpha \frac{t + \frac{1}{t}}{2} \quad \text{και } \psi = \beta \frac{t - \frac{1}{t}}{2} \Rightarrow$$

$$\chi = \frac{\alpha}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \text{και } \psi = \frac{\beta}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \qquad (3)$$

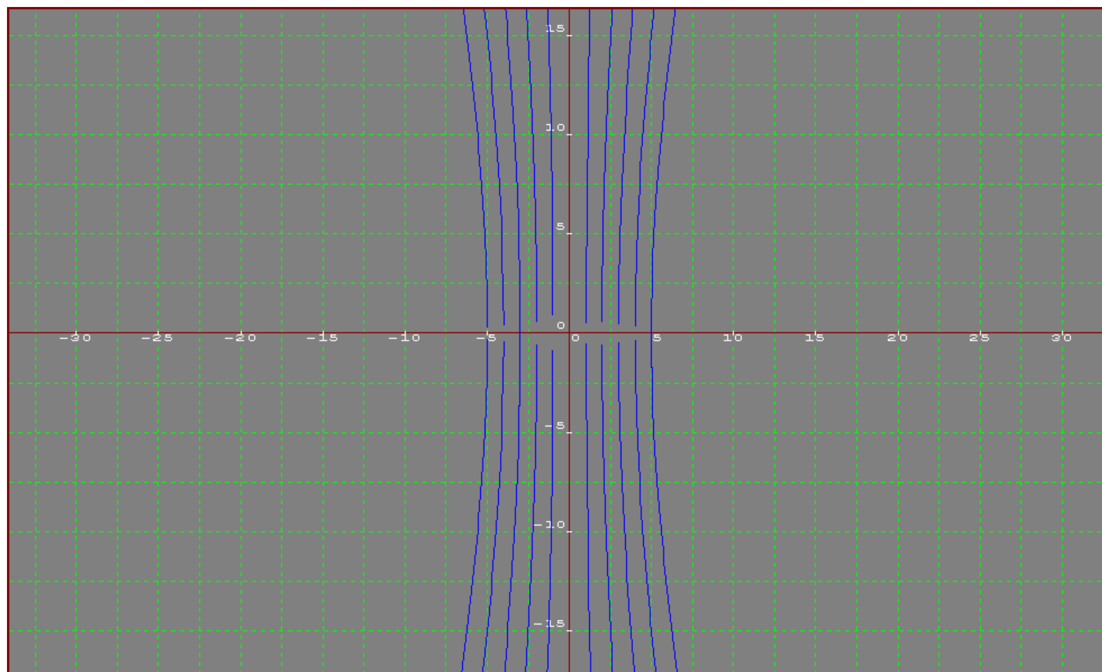
Επίσης με χρήση του προγράμματος Graphmath , λαμβάνω τα παρακάτω:



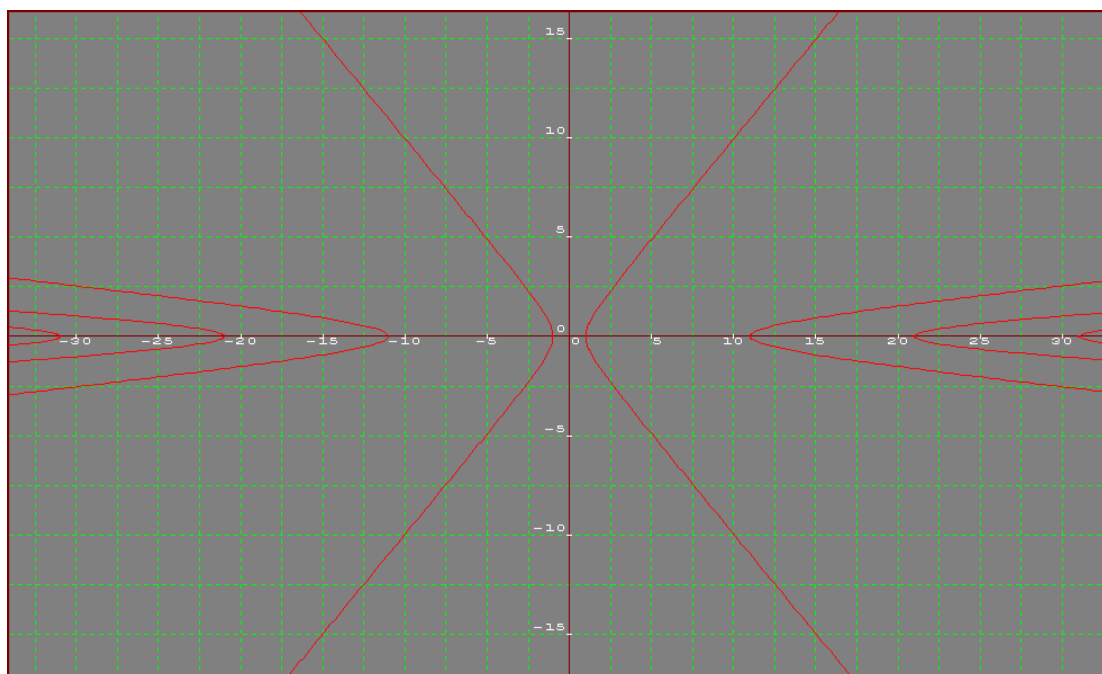
Η σχεδίαση της οικογένειας καμπυλών $\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ για β=1 (και για α=1 και με βήμα 1 έως 5)



Η σχεδίαση της ίδιας οικογένειας καμπυλών $\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$, αλλά για β=3



Η ίδια οικογένεια των πέντε υπερβολών για β =20



άλλες τέσσερις υπερβολές , με β=1 , αλλά από α=1 με βήμα 10 έως 40